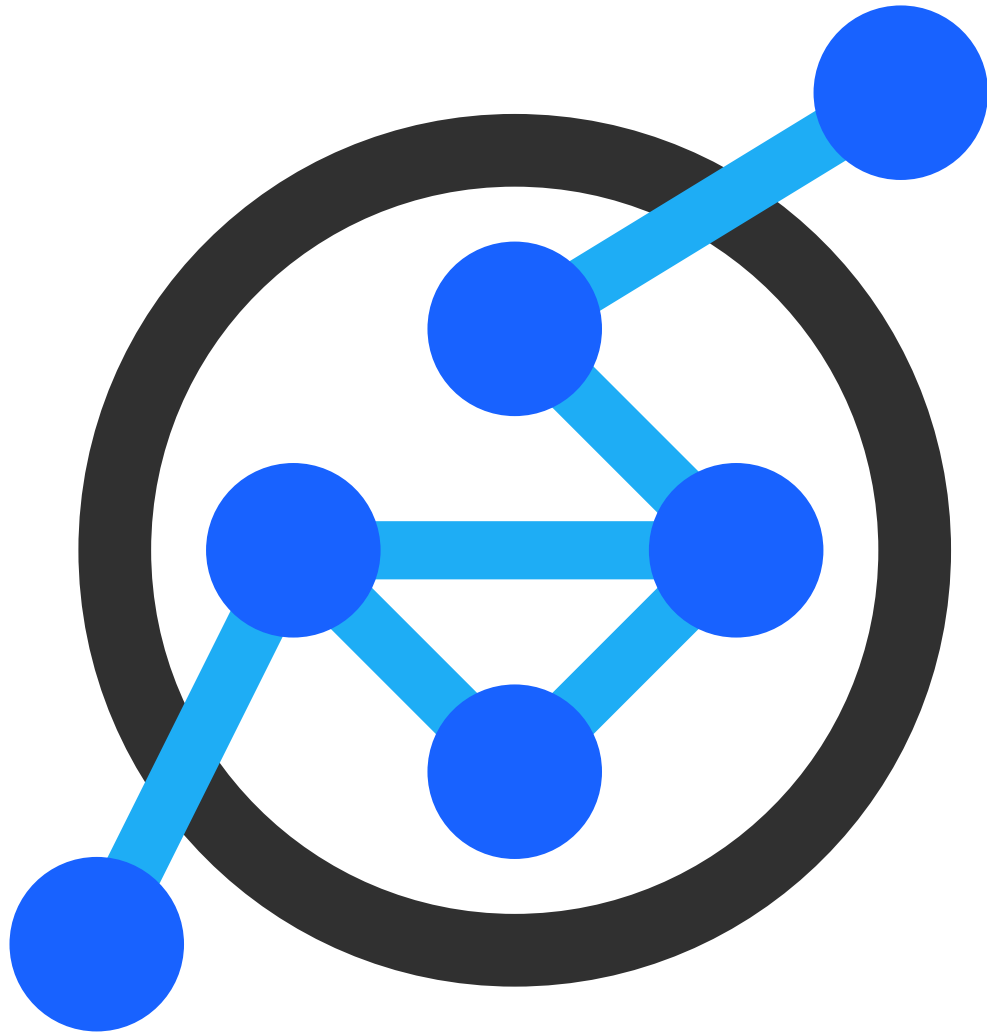


# Theorieaufgaben SOI Workshop



Swiss Olympiad in Informatics

Oktober 2020

## Symmetrische Zahlen

Maus Stofl ist momentan im mysteriösen Bitland in den Ferien, wo Maus Brodowski über sein Königreich regiert. Brodowski weiss von Stofls Begabung, Probleme zu lösen, aber da Maus Stofl gerade in den Ferien ist und nicht arbeiten möchte, braucht Stofl deine Hilfe, um die folgende Aufgabe zu lösen.

In Bitland sind Paläste mit einer Zahlensequenz (Palastnummer), wie beispielsweise 23145, beschriftet; die einzelnen Ziffern beschreiben die Höhe des Palastes an den unterschiedlichen Positionen, wenn man den Palast von vorne betrachtet. Zum einen mag Maus Brodowski Paläste, die symmetrisch erscheinen, wie zum Beispiel die Zahl 37973. Zum andern organisiert er auch gerne Parties für alle seine Landsleute. In Bitland ist es üblich, dass man eine Party macht, wenn die (wachsende) Bevölkerung die Zahl erreicht, die einem Palast entspricht. Brodowski überlegt sich einen weiteren symmetrischen Palast zu bauen, aber er möchte zuerst wissen, um wieviele Leute die Bevölkerung wachsen muss, bis ihre Zahl der nächstkleinsten Palastnummer entspricht.

### Aufgabe

Wir nennen eine Zahl symmetrisch, falls die Ziffernsequenz von links nach rechts gelesen dieselbe ist wie von rechts nach links gelesen. So sind 121, 44544, 7337 alle symmetrisch, aber 233, 9595 und 800 sind nicht symmetrisch. Insbesondere sollte die Zahl keine führenden Nullen enthalten, 00800 ist keine symmetrische Zahl.

Gegeben sei die Bevölkerung von Bitland  $N$ , finde die kleinste ganze Zahl  $K$ , sodass  $N + K$  symmetrisch ist.

### Eingabe

Eine einzelne ganze Zahl  $N$ ,  $N > 0$ .

### Ausgabe

Eine einzelne ganze Zahl  $K$ , sodass  $N + K$  eine symmetrische Zahl ist.

### Beispiele

- Für  $N = 123$  ist die nächstgrössere symmetrische Zahl  $N + K = 131$ , also  $K = 8$ .
- Für  $N = 141$  ist die nächstgrössere symmetrische Zahl  $N + K = 141$ , also  $K = 0$ .
- Für  $N = 3541$  ist die nächstgrössere symmetrische Zahl  $N + K = 3553$ , also  $K = 12$ .
- Für  $N = 129999931$  ist die nächstgrössere symmetrische Zahl  $N + K = 13000031$ , also  $K = 100$ .



## Der Wachturm

Du spielst dein liebstes Echtzeitstrategiespiel. Das Spiel wird auf einem Raster gespielt, auf welchem man sich in 8 verschiedene Richtungen bewegen kann (Nord, Nordost, Ost, Südost, Süd, Südwest, West, Nordwest).

Du hast bereits einige Lagerhallen gebaut. Jede Lagerhalle belegt eine der Rasterzellen. Nun sollst du einen einzelnen Wachturm bauen, der alle Lagerhallen beschützt. Der Wachturm soll in einer Zelle gebaut werden, zu der das entfernteste Lagerhaus so nahe wie möglich steht. Es ist möglich, aber nicht zwingend, dass der Wachturm auf einer Rasterzelle gebaut wird, auf der sich bereits eine Lagerhalle befindet.

In anderen Worten, für eine bestimmte Position des Wachturms ist der *Beobachtungsradius*  $r$  des Wachturms die kleinste Ganzzahl, die es ermöglicht, jede Lagerhalle von dort in maximal  $r$  Schritten zu erreichen. Denke daran, dass man in jedem Schritt in 8 Richtungen gehen kann (Nord, Nordost, Ost, Südost, Süd, Südwest, West, Nordwest). Du möchtest nun den Ort für den Wachturm finden, an dem  $r$  so klein wie möglich ist.

### Aufgabe

Gegeben sind die Positionen der Lagerhallen:  $n$  verschiedene Punkte  $(x_i, y_i)$ . Finde eine mögliche optimale Position für den Wachturm. Wenn es mehr als eine Lösung gibt, kannst du eine beliebige davon ausgeben.

### Beispiel

Eingabe:  $n = 3$  mit den Punkten  $\{(1, 0), (4, 1), (4, 4)\}$ .

Ausgabe:  $(2, 2)$ .

Die Situation ist unten dargestellt. Im Bild stellt "." eine leere Gitterzelle dar und "x" steht für eine Lagerhalle. Die optimale Position für den Wachturm ist mit "\*" gekennzeichnet. (Die Koordinaten in der Zelle in der Ecke unten links sind  $(0, 0)$ .)

```
....x
.....
..**
....x
.x...
```

# Fingersatz

Maus Peter spielt leidenschaftlich gerne Klavier. Dazu sucht er sich immer anspruchsvollere und längere Kompositionen aus, die er dann stundenlang trainiert und einübt. Besonders wichtig für eine gelungene Interpretation ist ein tadelloser Fingersatz.

Der Einfachheit halber betrachten wir ein Stück, das lediglich aus jeweils einem Ton zur selben Zeit besteht und das sich ausschliesslich mit der rechten Hand spielen lässt. Zudem besteht unser Stück nur aus Ganztönen. D.h. es werden nur die weissen Tasten der Klaviatur verwendet. Diese weissen Tasten sind von links nach rechts durchnummeriert von 1 bis 50 (7 Oktaven).

Als Fingersatz verstehen wir nun folgendes: Neben jede Note notiert Peter mit welchem Finger er die Note spielt, indem er eine Zahl aus der Menge  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  hinschreibt. Dabei stehen die Zahlen für folgende Finger der rechten Hand (von links nach rechts):

1. Daumen
2. Zeigefinger
3. Mittelfinger
4. Ringfinger
5. kleiner Finger

Peter möchte nun den elegantesten Fingersatz für sein Stück finden. Ein Fingersatz ist dann elegant, wenn er möglichst ohne Bewegungen der Hand gespielt werden kann. Dazu verwendet er folgende vereinfachte Methode um die Eleganz eines Fingersatzes zu bewerten:

Eine Note bringt einen Eleganzpunkt in folgenden Fällen:

- Die Note ist die erste Note des Stückes.
- Der Unterschied zwischen vorheriger und aktueller Tastenzahl entspricht dem Unterschied zwischen vorheriger und aktueller Fingerzahl. Mathematisch: Für die Tastenzahlen  $t_i$  und  $t_{i+1}$  und Fingerzahlen  $f_i$  und  $f_{i+1}$  muss  $t_i - t_{i+1} = f_i - f_{i+1}$  gelten. Intuitiv bedeutet die Formel, dass Maus Peter zum Spielen der  $i$ -ten und  $i + 1$ -ten Note einen Finger für jede Taste zwischen den beiden Noten plazieren kann.

Andernfalls bringt die Note keinen Eleganzpunkt.

## Aufgabe

Finde einen Fingersatz mit maximaler Anzahl Eleganzpunkten.

## Eingabe

Die Eingabe besteht aus zwei Zeilen. Die erste Zeile enthält die ganze Zahl  $N$ , die Anzahl der Noten im Stück. Die zweite Zeile enthält  $N$  ganze Zahlen  $t_i$  ( $1 \leq t_i \leq 50$ ), die Tastenzahlen der Noten im Stück.

## Ausgabe

Die Ausgabe soll zwei Zeilen enthalten. Gib in der ersten Zeile die optimale Anzahl Eleganzpunkte aus. Auf der zweiten Zeile sollst du  $N$  Zahlen  $f_i$  ( $1 \leq f_i \leq 5$ ) getrennt durch einzelne Leerzeichen ausgeben, die einen möglichen optimalen Fingersatz beschreiben. Falls mehrere optimale Lösungen existieren, gib eine beliebige davon aus.



## Beispiele

### Beispiel 1 - Hänschen klein ( $C'=3$ )<sup>1</sup>

Eingabe	Ausgabe
13 7 5 5 6 4 4 3 4 5 6 7 7 7	13 5 3 3 4 2 2 1 2 3 4 5 5 5

### Beispiel 2 - Alle meine Entchen ( $C'=5$ )

Eingabe	Ausgabe
27 5 6 7 8 9 9 10 10 10 10 9 10 10 10 ↪ 10 9 8 8 8 8 7 7 6 6 6 6 5	25 1 2 3 4 5 5 5 5 5 4 5 5 5 4 3 ↪ 3 3 3 2 2 1 1 1 1 1

### Beispiel 3 - Australische Nationalhymne ( $C'=1$ , $C''=8$ )

Eingabe	Ausgabe
28 5 8 5 3 5 8 8 8 10 9 8 7 8 9 5 8 5 ↪ 3 1 5 5 6 10 9 8 7 6 5	22 1 4 1 1 3 2 2 2 4 3 2 1 2 3 1 4 1 ↪ 3 1 5 5 1 5 4 3 2 1 1

<sup>1</sup>Die Bezeichnung  $C'=3$  bezeichnet die Tastenzahl des eingestrichenen C. Sie hilft dir lediglich, falls du die Noten selber spielen möchtest, ist aber für die Aufgabe nicht weiter relevant.



## Der neue Schal

Der Winter rückt näher und die Grossmutter von Maus Stoffl macht sich grosse Sorgen um ihn, denn sie meint er ziehe sich einfach nicht warm genug an. Deshalb will seine Grossmutter ihm einen Schal stricken. Stoffl wünscht sich einen ganz speziellen Schal: er möchte, dass zwei verschiedene Strickmuster (wir nennen sie 0 und 1) verwendet werden. Jede Reihe des Schals soll aus  $N$  Maschen bestehen und jede dieser Maschen ist entweder mit dem Strickmuster 0 oder dem Strickmuster 1 gestrickt. Es gibt somit  $2^N$  verschiedene Möglichkeiten wie die beiden Muster 0 und 1 in einer Reihe angeordnet werden können. Maus Stoffl möchte einen Schal, in dem jede der  $2^N$  Reihen genau einmal vorkommt und bei dem sich zwei aufeinanderfolgende Reihen an genau einer Stelle unterscheiden.

Die Grossmutter von Stoffl möchte ihm diesen Wunsch erfüllen und hat angefangen zu stricken. Doch schon nach ein paar Reihen ist sie sich nicht mehr sicher, welche Reihen sie nun schon gestrickt hat. Da sie sich nicht gleichzeitig auf das Muster und das Stricken konzentrieren kann, sollst du ihr helfen. Schreibe ein Programm, welches einen Plan für den Schal ausgibt.

### Aufgabe

Schreibe ein Programm, welches für ein gegebenes  $N$  einen Plan für den Schal ausgibt, welchen die Grossmutter stricken soll. Der Plan besteht aus mehreren 0en und 1en, die in  $2^N$  Reihen aufgeteilt sind. Jede der Reihen hat die Länge  $N$  und jede Reihe muss unterschiedlich sein. Zwei aufeinanderfolgende Reihen müssen sich an genau einer Position unterscheiden. Falls mehrere Lösungen existieren, kannst du eine beliebige ausgeben.

### Beispiel

Für  $N = 3$  wäre eine mögliche Ausgabe die folgende:

```
100
101
001
011
111
110
010
000
```